$\sqrt{6}$が無理数であることを示しなさい。

【証明】

$\sqrt{6}$が無理数でないと仮定する。このとき、$\sqrt{6}$は有理数であり、

$\sqrt{6}=\dfrac{q}{p}$($p,q$ は整数であり互いに素)と表すことができる。このとき両辺を二乗して、

$6=\dfrac{q^2}{p^2}$ であるから $q^2=6p^2\ldots$①となる。このとき$q$ は6の倍数となるので、

$q=6q'$とおくことができる。これを①に代入して、

(　　　　　)となる。このとき$p$ も6の倍数となる。

これは$p,q$ が互いに素であるという仮定に反している。

したがって、$\sqrt{6}$が無理数であることが示された。

整数$n$ について、$n^3+2n^2+3n+1$ が奇数であることを証明しなさい。

ヒント：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ を利用する

【証明】

$(i)$ $n$ が奇数のとき

$n$ はある整数$k$ を用いて $2k+1$と表すことができる。このとき、

$n^3+2n^2+3n+1$ は$k$ を用いて(　　　　　　)と表すことができ、これは奇数である。

$(ii)$ $n$ が偶数のとき

$n$ はある整数$k$ を用いて $2k$ と表すことができる。このとき、

$n^3+2n^2+3n+1$ は$k$ を用いて $2\left(4k^3+4k^2+3k\right)+1$と表すことができ、これは奇数である。

以上より、整数$n$ について $n^3+2n^2+3n+1$ は奇数である。

$1+\sqrt{3}$ が無理数であることを示しなさい。

ただし、$\sqrt{3}$が無理数であることを用いてもよい。

【証明】

$1+\sqrt{3}$ を有理数であると仮定する。このとき$q$ を有理数として、

$1+\sqrt{3}=q$ とおくことができる。これより、

$\sqrt{3}=(\qquad\quad)$となるが、このとき、左辺は無理数、右辺は有理数であるから矛盾。

したがって$1+\sqrt{3}$ は無理数であることが示された。

$n$ は整数とする。対偶を利用して、以下を証明せよ。

「$n^3$ が奇数ならば、$n$ も奇数」

【証明】

対偶「$n$ が偶数ならば、$n^3$ は偶数」を証明する。

$n$ は、整数$k$ を用いて $n=($ ① $)$と表せる。このとき、$n^3=($ ② $)$と表せるので、

$k$ は整数であるから、$n^3$ は偶数である。

よって、題意は示された。

整数$n$について、$n^3+n^2+3$が奇数であることを証明しなさい。

ヒント：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$を利用する

【証明】

$(\,i\,)$ $n$が奇数のとき

$n$はある整数$k$を用いて$2k+1$と表すことができる。このとき、

$n^3+n^2+3$は$k$を用いて(　　　　　　　)と表すことができ、これは奇数である。

$(\,ii\,)$ $n$が偶数のとき

$n$はある整数$k$を用いて$2k$と表すことができる。このとき、

$n^3+n^2+3$は$k$を用いて$2\left(4k^3+2k^2+1\right)+1$と表すことができ、これは奇数である。

以上より、整数$n$について$n^3+n^2+3$は奇数である。

$\sqrt{3}$が無理数であることを示しなさい。

【証明】

$\sqrt{3}$が無理数でないと仮定する。このとき、$\sqrt{3}$は有理数であり、

$\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$($p,q$は整数であり互いに素)と表すことができる。このとき両辺を二乗して、

$3=\dfrac{q^2}{p^2}$であるから$q^2=3p^2\ldots$①となる。このとき$q$は3の倍数となるので、

$q=3q'$とおくことができる。これを①に代入して、

(　　　　　)となる。このとき$p$も3の倍数となる。

これは$p,q$が互いに素であるという仮定に反している。

したがって、$\sqrt{3}$が無理数であることが示された。

$\sqrt{2}$が無理数であることを示しなさい。

【証明】

$\sqrt{2}$が無理数でないと仮定する。このとき、$\sqrt{2}$は有理数であり、

$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ $(p,q$ は整数であり互いに素)と表すことができる。このとき両辺を二乗して、

$2=\dfrac{q^2}{p^2}$ であるから $q^2=2p^2\ldots$①となる。このとき$q$は2の倍数となるので、

$q=2q'$とおくことができる。これを①に代入して、

(　　　　　)となる。このとき$p$も2の倍数となる。

これは$p,q$が互いに素であるという仮定に反している。

したがって、$\sqrt{2}$が無理数であることが示された。

$\sqrt{5}+\sqrt{7}$ が無理数であることを示しなさい。

ただし、$\sqrt{5},\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてもよい。

【証明】

$\sqrt{5}+\sqrt{7}$ を有理数であると仮定する。このとき$q$を有理数として、

$\sqrt{5}+\sqrt{7}=q$とおくことができる。このとき両辺を2乗して、

$12+2\sqrt{35}=q^2$ となるから、式変形して、

$\sqrt{35}=($　　　　　$)$となる。

このとき、$\sqrt{5},\sqrt{7}$ が無理数であることから $\sqrt{35}$ も無理数であり、

左辺は無理数、右辺は有理数であるから矛盾。

したがって $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ は無理数であることが示された。

$\alpha$ を実数とし、$\alpha^3 = 25$ を満たすとする。
このとき、$\alpha$ は無理数であることを証明しなさい。
【証明】
$\alpha$ が有理数であると仮定する。
このとき、$\alpha = \frac{q}{p}$ ($p, q$ は整数であり互いに素)…①
とおくことができる。
ここで、条件と①より $\frac{q^3}{p^3} = 25$ であるから、
$q^3 = 25p^3$ …②となる。
このとき、$q$ は5の倍数であるから、$q = 5q'$ ($q'$ は整数)
とおくことができる。これを②に代入して整理すると、
(　　　　)となり、$p$ も5の倍数となる。
これは$p, q$ ともに5という公約数を持つことになり、
互いに素であるという仮定に反している。
したがって、$\alpha$ は無理数である。

$n^3 - n + 6$ が6で割り切れることを示しなさい。
【証明】
$n^3 - n + 6$
$= (\qquad\qquad) + 6$
となる。
(ヒント：$n^3 - n$ を因数分解する)
連続する3整数の積は6の倍数であるから、
$n^3 - n + 6$ は (6の倍数) $+ 6$ の形となり、
6で割り切れることが示された。